

# 重庆市 2024 年初中学业水平暨高中招生考试

## 数学试题 (A 卷)

(全卷共三个大题, 满分 150 分, 考试时间 120 分钟)

注意事项:

1. 试题的答案书写在答题卡上, 不得在试题卷上直接作答;
2. 作答前认真阅读答题卡上的注意事项;
3. 作图 (包括作辅助线) 请一律用黑色 2B 铅笔完成;
4. 考试结束, 由监考人员将试题卷和答题卡一并收回.

参考公式: 抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) 的顶点坐标为  $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ , 对称轴为  $x = -\frac{b}{2a}$ .

一、选择题: (本大题 10 个小题, 每小题 4 分, 共 40 分) 在每个小题的下面, 都给出代号为 A、B、C、D 的四个答案, 其中只有一个是正确的, 请将答题卡上题号右侧确答案所对应的方框涂黑.

1. 下列四个数中, 最小的数是 ( )

- A. -2                      B. 0                      C. 3                      D.  $-\frac{1}{2}$

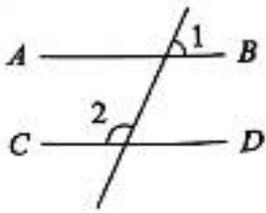
2. 下列四种化学仪器的示意图中, 是轴对称图形的是 ( )



3. 已知点  $(-3, 2)$  在反比例函数  $y = \frac{k}{x}$  ( $k \neq 0$ ) 的图象上, 则  $k$  的值为 ( )

- A. -3                      B. 3                      C. -6                      D. 6

4. 如图,  $AB \parallel CD$ ,  $\angle 1 = 65^\circ$ , 则  $\angle 2$  的度数是 ( )



- A.  $105^\circ$                       B.  $115^\circ$                       C.  $125^\circ$                       D.  $135^\circ$

5. 若两个相似三角形的相似比是1:3，则这两个相似三角形的面积比是（ ）

- A. 1:3                      B. 1:4                      C. 1:6                      D. 1:9

6. 烷烃是一类由碳、氢元素组成的有机化合物，下图是这类物质前四种化合物的分子结构模型图，其中灰球代表碳原子，白球代表氢原子。第1种如图①有4个氢原子，第2种如图②有6个氢原子，第3种如图③有8个氢原子，……按照这一规律，第10种化合物的分子结构模型中氢原子的个数是（ ）

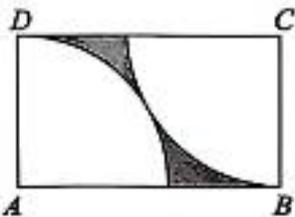


- A. 20                      B. 22                      C. 24                      D. 26

7. 已知  $m = \sqrt{27} - \sqrt{3}$ ，则实数  $m$  的范围是（ ）

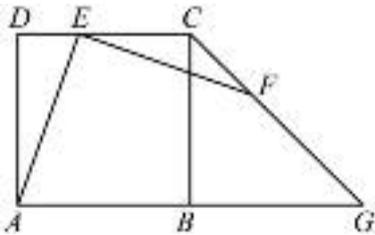
- A.  $2 < m < 3$                       B.  $3 < m < 4$                       C.  $4 < m < 5$                       D.  $5 < m < 6$

8. 如图，在矩形  $ABCD$  中，分别以点  $A$  和  $C$  为圆心， $AD$  长为半径画弧，两弧有且仅有一个公共点。若  $AD = 4$ ，则图中阴影部分的面积为（ ）



- A.  $32 - 8\pi$                       B.  $16\sqrt{3} - 4\pi$   
 C.  $32 - 4\pi$                       D.  $16\sqrt{3} - 8\pi$

9. 如图，在正方形  $ABCD$  的边  $CD$  上有一点  $E$ ，连接  $AE$ ，把  $AE$  绕点  $E$  逆时针旋转  $90^\circ$ ，得到  $FE$ ，连接  $CF$  并延长与  $AB$  的延长线交于点  $G$ 。则  $\frac{FG}{OE}$  的值为（ ）



- A.  $\sqrt{2}$                       B.  $\sqrt{3}$                       C.  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$                       D.  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

10. 已知整式  $M : a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ，其中  $n, a_{n-1}, \dots, a_0$  为自然数， $a_n$  为正整数，且  $n + a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 = 5$ 。下列说法：

- ① 满足条件的整式  $M$  中有 5 个单项式；  
 ② 不存在任何一个  $n$ ，使得满足条件的整式  $M$  有且只有 3 个；  
 ③ 满足条件的整式  $M$  共有 16 个。

其中正确的个数是 ( )

- A. 0                      B. 1                      C. 2                      D. 3

二、填空题：(本大题 8 个小题，每小题 4 分，共 32 分) 请将每小题的答案直接填在答题卡中对应的横线上。

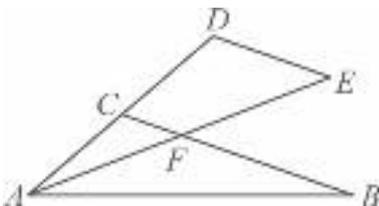
11. 计算：  $(\pi - 3)^0 + (\frac{1}{2})^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

12. 如果一个多边形的每一个外角都是  $40^\circ$ ，那么这个多边形的边数为  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

13. 重庆是一座魔幻都市，有着丰富的旅游资源。甲、乙两人相约来到重庆旅游，两人分别从 A、B、C 三个景点中随机选择一个景点游览，甲、乙两人同时选择景点 B 的概率为  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

14. 随着经济复苏，某公司近两年的总收入逐年递增。该公司 2021 年缴税 40 万元，2023 年缴税 48.4 万元，该公司这两年缴税的年平均增长率是  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

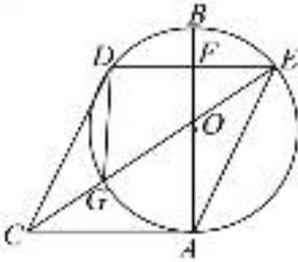
15. 如图，在  $\triangle ABC$  中，延长 AC 至点 D，使  $CD = CA$ ，过点 D 作  $DE \parallel CB$ ，且  $DE = DC$ ，连接 AE 交 BC 于点 F。若  $\angle CAB = \angle CFA$ ， $CF = 1$ ，则  $BF = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



16. 若关于  $x$  的不等式组  $\begin{cases} \frac{4x-1}{3} < x+1 \\ 2(x+1) \geq -x+a \end{cases}$  至少有 2 个整数解，且关于  $y$  的分式方程  $\frac{a-1}{y-1} = 2 - \frac{3}{1-y}$  的解

为非负整数，则所有满足条件的整数  $a$  的值之和为  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

17. 如图，以  $AB$  为直径的  $\odot O$  与  $AC$  相切于点  $A$ ，以  $AC$  为边作平行四边形  $ACDE$ ，点  $D$ 、 $E$  均在  $\odot O$  上， $DE$  与  $AB$  交于点  $F$ ，连接  $CE$ ，与  $\odot O$  交于点  $G$ ，连接  $DG$ 。若  $AB=10, DE=8$ ，则  $AF =$  \_\_\_\_\_。  $DG =$  \_\_\_\_\_。



18. 我们规定：若一个正整数  $A$  能写成  $m^2 - n$ ，其中  $m$  与  $n$  都是两位数，且  $m$  与  $n$  的十位数字相同，个位数字之和为 8，则称  $A$  为“方减数”，并把  $A$  分解成  $m^2 - n$  的过程，称为“方减分解”。例如：因为  $602 = 25^2 - 23$ ，25 与 23 的十位数字相同，个位数字 5 与 3 的和为 8，所以 602 是“方减数”，602 分解成  $602 = 25^2 - 23$  的过程就是“方减分解”。按照这个规定，最小的“方减数”是\_\_\_\_\_。把一个“方减数”  $A$  进行“方减分解”，即  $A = m^2 - n$ ，将  $m$  放在  $n$  的左边组成一个新的四位数  $B$ ，若  $B$  除以 19 余数为 1，且  $2m + n = k^2$  ( $k$  为整数)，则满足条件的正整数  $A$  为\_\_\_\_\_。

三、解答题：（本大题 8 个小题，第 19 题 8 分，其余每小题 10 分，共 78 分）解答时每小题必须给出必要的演算过程或推理步骤，画出必要的图形（包括辅助线），请将解答过程书写在答题卡中对应的位置上。

19. 计算：

(1)  $x(x-2y) + (x+y)^2$ ；

(2)  $\left(1 + \frac{1}{a}\right) \div \frac{a^2 - 1}{a^2 + a}$ 。

20. 为了解学生的安全知识掌握情况，某校举办了安全知识竞赛。现从七、八年级的学生中各随机抽取 20 名学生的竞赛成绩（百分制）进行收集、整理、描述、分析。所有学生的成绩均高于 60 分（成绩得分用  $x$  表示，共分成四组：A.  $60 < x \leq 70$ ；B.  $70 < x \leq 80$ ；C.  $80 < x \leq 90$ ；D.  $90 < x \leq 100$ ），下面给出了部分信息：

七年级 20 名学生的竞赛成绩为：

66, 67, 68, 68, 75, 83, 84, 86, 86, 86,

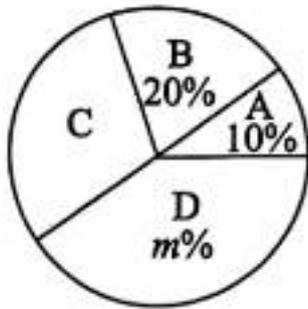
86, 87, 87, 89, 95, 95, 96, 98, 98, 100.

八年级 20 名学生的竞赛成绩在 C 组的数据是：81，82，84，87，88，89。

七、八年级所抽学生的竞赛成绩统计表

年级	七年级	八年级
平均数	85	85
中位数	86	$b$
众数	$a$	79

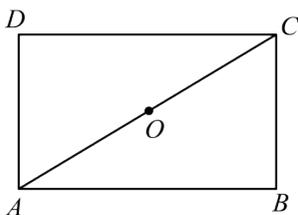
八年级所抽学生的竞赛成绩统计图



根据以上信息，解答下列问题：

- (1) 上述图表中  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $b = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $m = \underline{\hspace{2cm}}$ ；
- (2) 根据以上数据分析，你认为该校七、八年级中哪个年级学生的安全知识竞赛成绩较好？请说明理由（写出一条理由即可）；
- (3) 该校七年级有 400 名学生，八年级有 500 名学生参加了此次安全知识竞赛，估计该校七、八年级参加此次安全知识竞赛成绩优秀 ( $x > 90$ ) 的学生人数是多少？

21. 在学习了矩形与菱形的相关知识后，小明同学进行了更深入的研究，他发现，过矩形的一条对角线的中点作这条对角线的垂线，与矩形两边相交的两点和这条对角线的两个端点构成的四边形是菱形，可利用证明三角形全等得到此结论。根据他的想法与思路，完成以下作图与填空：



- (1) 如图，在矩形  $ABCD$  中，点  $O$  是对角线  $AC$  的中点。用尺规过点  $O$  作  $AC$  的垂线，分别交  $AB$ ，

$CD$  于点  $E, F$ , 连接  $AF, CE$ . (不写作法, 保留作图痕迹)

(2) 已知: 矩形  $ABCD$ , 点  $E, F$  分别在  $AB, CD$  上,  $EF$  经过对角线  $AC$  的中点  $O$ , 且  $EF \perp AC$ . 求证: 四边形  $AECF$  是菱形.

证明:  $\because$  四边形  $ABCD$  是矩形,

$\therefore AB \parallel CD$ .

$\therefore$  ①,  $\angle OCF = \angle OAE$ .

$\because$  点  $O$  是  $AC$  的中点,

$\therefore$  ②.

$\therefore \triangle CFO \cong \triangle AEO$  (AAS).

$\therefore$  ③.

又  $\because OA = OC$ ,

$\therefore$  四边形  $AECF$  是平行四边形.

$\because EF \perp AC$ ,

$\therefore$  四边形  $AECF$  是菱形.

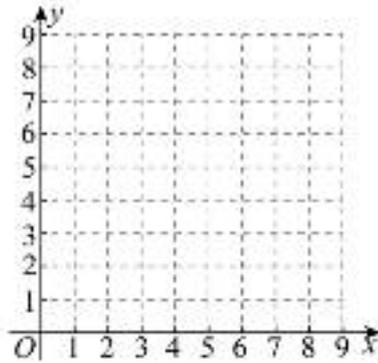
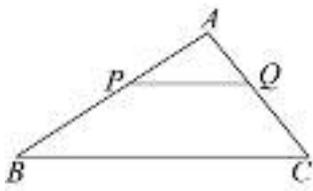
进一步思考, 如果四边形  $ABCD$  是平行四边形呢? 请你模仿题中表述, 写出你猜想的结论: ④.

22. 为促进新质生产力的发展, 某企业决定投入一笔资金对现有甲、乙两类共 30 条生产线的设备进行更新换代.

(1) 为鼓励企业进行生产线的设备更新, 某市出台了相应的补贴政策. 根据相关政策, 更新 1 条甲类生产线的设备可获得 3 万元的补贴, 更新 1 条乙类生产线的设备可获得 2 万元的补贴. 这样更新完这 30 条生产线的设备, 该企业可获得 70 万元的补贴. 该企业甲、乙两类生产线各有多少条?

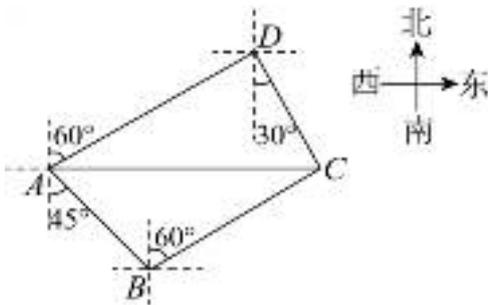
(2) 经测算, 购买更新 1 条甲类生产线的设备比购买更新 1 条乙类生产线的设备需多投入 5 万元, 用 200 万元购买更新甲类生产线的设备数量和用 180 万元购买更新乙类生产线的设备数量相同, 那么该企业在获得 70 万元的补贴后, 还需投入多少资金更新生产线的设备?

23. 如图, 在  $\triangle ABC$  中,  $AB = 6$ ,  $BC = 8$ , 点  $P$  为  $AB$  上一点, 过点  $P$  作  $PQ \parallel BC$  交  $AC$  于点  $Q$ . 设  $AP$  的长度为  $x$ , 点  $P, Q$  的距离为  $y_1$ ,  $\triangle ABC$  的周长与  $\triangle APQ$  的周长之比为  $y_2$ .

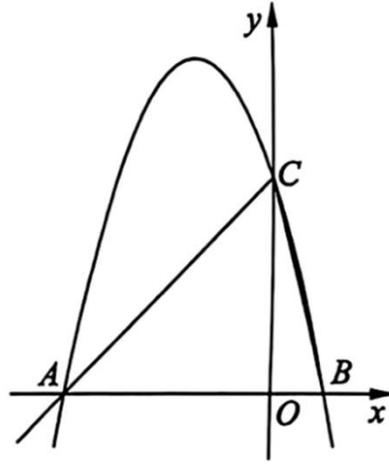
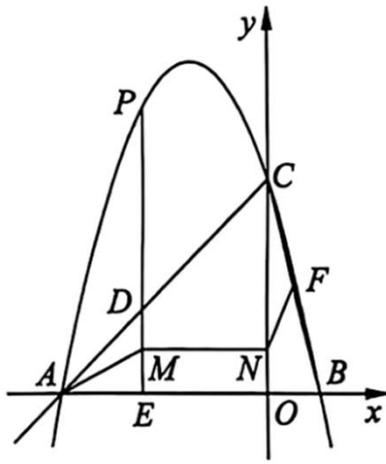


- (1) 请直接写出  $y_1$ ,  $y_2$  分别关于  $x$  的函数表达式, 并注明自变量  $x$  的取值范围;
- (2) 在给定的平面直角坐标系中画出函数  $y_1$ ,  $y_2$  的图象; 请分别写出函数  $y_1$ ,  $y_2$  的一条性质;
- (3) 结合函数图象, 直接写出  $y_1 > y_2$  时  $x$  的取值范围. (近似值保留一位小数, 误差不超过 0.2)

24. 如图, 甲、乙两艘货轮同时从 A 港出发, 分别向 B, D 两港运送物资, 最后到达 A 港正东方向的 C 港装运新的物资. 甲货轮沿 A 港的东南方向航行 40 海里后到达 B 港, 再沿北偏东  $60^\circ$  方向航行一定距离到达 C 港. 乙货轮沿 A 港的北偏东  $60^\circ$  方向航行一定距离到达 D 港, 再沿南偏东  $30^\circ$  方向航行一定距离到达 C 港. (参考数据:  $\sqrt{2} \approx 1.41$ ,  $\sqrt{3} \approx 1.73$ ,  $\sqrt{6} \approx 2.45$ )



- (1) 求 A, C 两港之间的距离 (结果保留小数点后一位);
  - (2) 若甲、乙两艘货轮的速度相同 (停靠 B、D 两港的时间相同), 哪艘货轮先到达 C 港? 请通过计算说明.
25. 如图, 在平面直角坐标系中, 抛物线  $y = ax^2 + bx + 4$  ( $a \neq 0$ ) 经过点  $(-1, 6)$ , 与  $y$  轴交于点 C, 与  $x$  轴交于 A, B 两点 (A 在 B 的左侧), 连接 AC, BC,  $\tan \angle CBA = 4$ .



备用图

(1) 求抛物线的表达式;

(2) 点  $P$  是射线  $CA$  上方抛物线上的一动点, 过点  $P$  作  $PE \perp x$  轴, 垂足为  $E$ , 交  $AC$  于点  $D$ . 点  $M$  是线段  $DE$  上一动点,  $MN \perp y$  轴, 垂足为  $N$ , 点  $F$  为线段  $BC$  的中点, 连接  $AM, NF$ . 当线段  $PD$  长度取得最大值时, 求  $AM + MN + NF$  的最小值;

(3) 将该抛物线沿射线  $CA$  方向平移, 使得新抛物线经过 (2) 中线段  $PD$  长度取得最大值时的点  $D$ , 且与直线  $AC$  相交于另一点  $K$ . 点  $Q$  为新抛物线上的一个动点, 当  $\angle QDK = \angle ACB$  时, 直接写出所有符合条件的点  $Q$  的坐标.

26. 在  $\triangle ABC$  中,  $AB = AC$ , 点  $D$  是  $BC$  边上一点 (点  $D$  不与端点重合). 点  $D$  关于直线  $AB$  的对称点为点  $E$ , 连接  $AD, DE$ . 在直线  $AD$  上取一点  $F$ , 使  $\angle EFD = \angle BAC$ , 直线  $EF$  与直线  $AC$  交于点  $G$ .

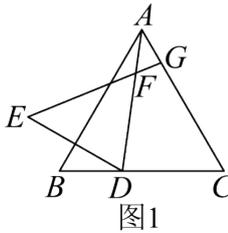


图1

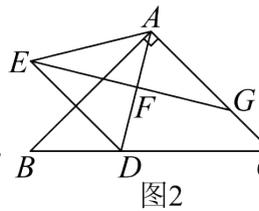
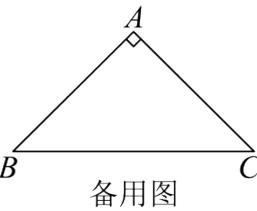


图2



备用图

(1) 如图 1, 若  $\angle BAC = 60^\circ, BD < CD, \angle BAD = \alpha$ , 求  $\angle AGE$  的度数 (用含  $\alpha$  的代数式表示);

(2) 如图 1, 若  $\angle BAC = 60^\circ, BD < CD$ , 用等式表示线段  $CG$  与  $DE$  之间的数量关系, 并证明;

(3) 如图 2, 若  $\angle BAC = 90^\circ$ , 点  $D$  从点  $B$  移动到点  $C$  的过程中, 连接  $AE$ , 当  $\triangle AEG$  为等腰三角形

时, 请直接写出此时  $\frac{CG}{AG}$  的值.